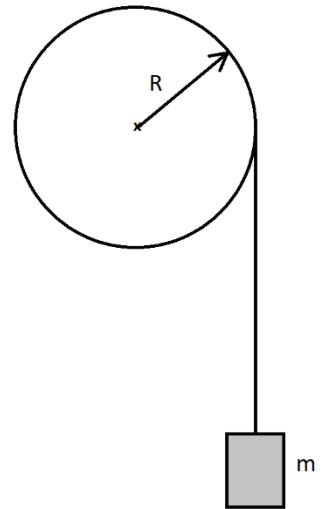


Moment setrvačnosti, kinetická energie rotujícího tělesa – řešení

Př. 1: Na obvodu válce o poloměru $R = 0,4 \text{ m}$, který má moment setrvačnosti $J = 0,15 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$, je navinuto vlákno, na němž je zavěšeno závaží o hmotnosti $0,3 \text{ kg}$. Válec se může otáčet okolo osy jdoucí jeho středem, vlákno neprokluzuje. Tření a hmotnost vlákna neuvažujte. Určete úhlovou rychlost, kterou se otáčí válec v okamžiku, kdy závaží urazilo z klidu dráhu



- 2 m
- 5 m

Nápověda: počítejte přeměnu potenciální energie závaží na kinetickou energii rotace válce.

$$R = 0,4 \text{ m}; J = 0,15 \text{ kg}\cdot\text{m}^2; m = 0,3 \text{ kg}; \omega = ?$$

$$E_k = \frac{1}{2} J \omega^2 = mgh = \Delta E_p \quad \leftarrow \text{závaží}$$

$$\omega^2 = \frac{2mgh}{J} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{2mgh}{J}}$$

$$a) h = 2 \text{ m}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{2 \cdot 0,3 \cdot 10 \cdot 2}{0,15}} = \sqrt{80} = \underline{\underline{8,94 \text{ s}^{-1} (\text{rad}\cdot\text{s}^{-1})}}$$

$$b) h = 5 \text{ m}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{2 \cdot 0,3 \cdot 10 \cdot 5}{0,15}} = \sqrt{200} = \underline{\underline{14,14 \text{ s}^{-1}}}$$

Př. 2: Země se okolo své osy otočí za 24 hodin. Považujte ji za homogenní kouli o poloměru 6400 km a hmotnosti $6 \cdot 10^{24} \text{ kg}$. Okolo Slunce Země obíhá rychlostí $30 \text{ km}\cdot\text{s}^{-1}$.

- Vypočítejte moment setrvačnosti Země vzhledem k její rotační ose.
- Vypočítejte kinetickou energii rotačního pohybu Země.
- Vypočítejte kinetickou energii posuvného pohybu Země.

Nápověda: $\omega = 2\pi f = 2\pi/T$

$$T = 24 \text{ h} = 86400 \text{ s}; R = 6400 \text{ km} = 6,4 \cdot 10^6 \text{ m}; m = 6 \cdot 10^{24} \text{ kg}; v = 30 \text{ km}\cdot\text{s}^{-1} = 3 \cdot 10^4 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$$

$$a) J = ?$$

$$J = \frac{2}{5} m R^2 (\text{koule}) \Rightarrow J = \frac{2}{5} \cdot 6 \cdot 10^{24} \cdot (6,4 \cdot 10^6)^2 = \underline{\underline{9,8 \cdot 10^{37} \text{ kg}\cdot\text{m}^2}}$$

$$b) E_{\text{rot}} = ?$$

$$E_{\text{rot}} = \frac{1}{2} J \omega^2 = \frac{1}{2} J \frac{4\pi^2}{T^2} = 2\pi^2 \frac{J}{T^2}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \quad E_{\text{rot}} = 2\pi^2 \cdot \frac{9,8 \cdot 10^{37}}{(86400)^2} = \underline{\underline{2,6 \cdot 10^{29} \text{ J}}}$$

$$c) E_{\text{kpřes}} = \frac{1}{2} m v^2; E_{\text{kpřes}} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 10^{24} \cdot (3 \cdot 10^4)^2 = \underline{\underline{2,7 \cdot 10^{33} \text{ J}}}$$

Př. 3: V autíčku je setrvačnick o poloměru 1 cm a hmotnosti 5 gramů. Při rozjíždění autíčka se setrvačnick roztočí na frekvenci $f = 120 \text{ Hz}$. Jakou rychlostí autíčko pojeďe po vodorovné podlaze? Hmotnost celého autíčka je 250 g.

Nápověda: Kinetická energie rotace setrvačnicku se přemění na kinetickou energii posuvného pohybu celého autíčka. Ztráty zanedbejte.

$$R = 1 \text{ cm} = 10^{-2} \text{ m}; m = 5 \text{ g} = 5 \cdot 10^{-3} \text{ kg}; f = 120 \text{ Hz} = 120 \text{ s}^{-1}; M = 250 \text{ g} = 0,25 \text{ kg}$$

$$v = ?$$

$$\begin{aligned} \text{setrvačnick: } E_{\text{krot}} &= \frac{1}{2} J \omega^2 \\ \omega &= 2\pi f \\ J &= \frac{1}{2} m R^2 \end{aligned} \left. \vphantom{\begin{aligned} E_{\text{krot}} &= \frac{1}{2} J \omega^2 \\ \omega &= 2\pi f \\ J &= \frac{1}{2} m R^2 \end{aligned}} \right\} E_{\text{krot}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} m R^2 \cdot 4\pi^2 f^2 = \pi^2 m R^2 f^2$$

$$E_{\text{krot}} = \pi^2 \cdot 5 \cdot 10^{-3} \cdot (10^{-2})^2 \cdot 120^2 = 0,071 \text{ J}$$

$$\text{autíčko: } E_{\text{kpos}} = E_{\text{krot}} = E_k = \frac{1}{2} M v^2 \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2E_k}{M}}$$

$$v = \sqrt{\frac{2 \cdot 0,071}{0,25}} = \underline{\underline{0,75 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}}}$$

Př. 4: Vypočítejte moment setrvačnosti koule z mědi vůči její geometrické rotační ose. Hustota mědi je $8960 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$.

- Koule je plná, vnější poloměr koule je 30 cm.
- Koule je dutá, vnější poloměr koule je 30 cm a tloušťka stěny 2 cm.

Úloha b) je nejjednodušší. Nápověda: $m = \rho V$; objem koule umíte spočítat nebo vzorec najdete v tabulkách.

$$\text{a) } \rho = 8960 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}; R = 30 \text{ cm} = 0,3 \text{ m}; J = ?$$

$$\left. \begin{aligned} J &= \frac{2}{5} m R^2 \\ m &= \rho V; V = \frac{4}{3} \pi R^3 \end{aligned} \right\} J = \frac{2}{5} \cdot \frac{4}{3} \pi \rho R^5 = \frac{8}{15} \pi \rho R^5$$

$$J = \frac{8}{15} \pi \cdot 8960 \cdot 0,3^5 = \underline{\underline{36,5 \text{ kg} \cdot \text{m}^2}}$$

$$\text{b) } \rho = 8960 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}; R_1 = 30 \text{ cm} = 0,3 \text{ m}; R_2 = 28 \text{ cm} = 0,28 \text{ m}; J = ?$$

Od J_1 koule s poloměrem 30 cm odečteme J_2 koule s poloměrem 28 cm

$$\left. \begin{aligned} J_1 &= 8\pi \rho R_1^5 \text{ (viz a)} \\ J_2 &= 8\pi \rho R_2^5 \end{aligned} \right\} J = J_1 - J_2 = \frac{8\pi}{15} \rho R_1^5 - \frac{8\pi}{15} \rho R_2^5$$

$$J = \frac{8\pi}{15} \rho (R_1^5 - R_2^5)$$

$$J = \frac{8\pi}{15} \cdot 8960 \cdot (0,3^5 - 0,28^5) = \underline{\underline{10,6 \text{ kg} \cdot \text{m}^2}}$$

Př. 5: Vypočítejte moment setrvačnosti dutého duralového válce s uzavřenými podstavami (plechovka), jehož vnější rozměry jsou: poloměr 0,1 m, výška 0,3 m. Tloušťka stěn válce je 2 mm. Hustota duralu je $2800 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$.

Nápověda: Rozdělte válec na samostatná dna a plášť tvaru prstence. Počítejte co nejpřesněji.

$$R = 0,1 \text{ m}; h = 0,3 \text{ m}; \rho = 2800 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}; t = 2 \text{ mm} = 2 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

Dna = podstavy jsou nízké válce o $R = 0,1 \text{ m}$

$$\left. \begin{aligned} J_1 = J_3 &= \frac{1}{2} m_1 R^2 \\ m_1 &= \rho V_1 = \rho \pi R^2 t \end{aligned} \right\} J_1 = J_3 = \frac{1}{2} \pi \rho R^4 t; J_1 = \frac{1}{2} \pi \cdot 2800 \cdot 0,1^4 \cdot 2 \cdot 10^{-3}$$

$$J_1 = 0,000880 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$$

Plášť válce = prstec (je 2 mm tenký)

$$\left. \begin{aligned} J_2 &= m_2 R^2 \\ m_2 &= \rho V_2 = \rho 2\pi R h t \end{aligned} \right\} J_2 = 2\pi \rho R^3 h t; J_2 = 2\pi \cdot 2800 \cdot 0,1^3 \cdot 0,3 \cdot 2 \cdot 10^{-3}$$

$$J_2 = 0,01056 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$$

$$J = J_1 + J_2 + J_3 = 2J_1 + J_2$$

$$J = 2 \cdot 0,00088 + 0,01056 = \underline{\underline{0,012 \text{ kg}\cdot\text{m}^2}}$$